

· 成果快报 ·

紧模空间的若干基本问题

许晨阳*

(北京大学 北京国际数学中心, 北京 100871)

[关键词] 模空间; KSBA-稳定性; K-稳定性; Fano 簇

代数几何学源于人们在早期研究里解多项式方程组的尝试,是现代数学中的一个核心领域,与数论、复几何、数学物理等很多其他学科有着广泛的联系。

在代数几何中,模空间是被用来参数化代数对象的一种构造。它是代数几何里最基本的工具之一。而因为代数簇的紧(或者射影)性是研究代数簇经常需要一个基本性质,人们往往需要构造紧的模空间。由于模空间的参数化意义,相对应的,这就使得人们需要研究代数簇的退化。

无论是从代数簇的双有理几何本身,还是对于典范度量的寻找,代数簇里面最基本的三个模块是典范极化流形,Calabi-丘流形和 Fano 流形。这三种流形的参数化都是代数几何和复几何里面最基本的问题之一。但是它们之间也有着基本的差异。代数几何中自然的模空间构造参数化的对象不应该仅仅只是代数簇本身,而是带有极化(polarization)的代数簇。因为典范极化流形带有自然的典范极化,这一类代数簇的模空间人们研究的最多。其中一维曲线的时候,这对应 Deligne-Mumford 模空间构造。在代数几何中,这构成了被研究最广泛的一类代数簇。高维典范流形的模空间的构造此后都是一个研究热点,其中 Gieseker, Viehweg 和 Donaldson 等人使用几何不变式论证明了模空间是一个拟射影簇。但是构造该空间的紧化是一个要困难很多的问题。在最近的工作中^[1],我们通过构造反例,证明了传统使用周稳定性的构造方法无法给出一个典范的紧模空间。80年代末期 Kollar-Shepherd-Barron 和 90年代初 Alexeev 提出了和传统的几何不变式论完全不同的方法来构造典范簇的模空间的自然紧化。他们的方法需要大量使用极小模型纲领,包括许多

当时仍然是猜想的部分,被称为 KSBA 紧化。也因此该紧模空间参数化的对象被我们称为 KSBA 稳定簇。

Kollar 在研究 KSBA 的紧化的时候把它归结为几个基本问题,其中包括紧性、局部闭性质、有界性和紧模空间本身的射影性。

1 KSBA 稳定簇的有界性

KSBA 稳定簇的有界性是困扰人们很久的一个问题。其中最困难的部分是体积分解为加数是否只有有限可能性的问题。Kollar 提出关于体积的著名的下降链猜想(DCC 猜想)^[2],该猜想可以马上推出上述关于体积分解的有限性答案为真。不久之后 Alexeev 解决了曲面的情形,但是包括三维在内的高维的情况长期以来没有进展。我们发展了带有对数典范奇点的一般型对数偶(log pair)的对数双有理有界理论^[3,4]。这是目前为止关于对数偶的有界性最深刻和一般的理论。利用此理论,我们证明了 Kollar 的 DCC 猜想。在此基础上,我们证明了该理论可以导出 KSBA 模空间的有界性^[5]。

在 DCC 猜想的证明中,我们使用了一系列归纳法。作为归纳法的步骤之一,我们也解决了对数典范阔值的上升链猜想。而作为 DCC 猜想的推论,我们还建立了一般型代数簇的自同构关于体积的线性界,并解决了固定 Cartier 指数的 Q-Fano 簇有界性的 Batyrev 猜想。

2 KSBA 稳定簇的紧性

另外一个关于 KSBA 模空间的基本问题是紧性问题。在 KSBA 稳定性理论的基本框架里,证明紧性需要极小模型纲领尤其是丰沛猜想的一些情

收稿日期:2015-10-17;修回日期:2015-12-14

* 通信作者,Email: cyxu@math.pku.edu.cn

况。这一点在 Kollar 建立了带有半对数典范奇点的典范极化对数偶和其正则化之间的等价对应之后,更成为证明紧性唯一待解决问题。目前得到的关于典范环的有限生成性的著名结果^[6],是一个重要进展,但是不能完全解决 KSBA 模空间的紧性问题,因为此时我们还需要处理带有对数典范奇点的情形。

我们解决了丰沛猜想在证明 KSBA 空间的紧性中所需要的特殊情形^[7],因此完成了 KSBA 空间紧性的证明。在同一篇文章里,我们还类似地解决了丰沛猜想的一些其他情形,包括证明了对数典范-flip 的存在性,把之前 flip 存在的结果^[6]从 klt 奇点推广到了最一般的对数典范奇点的情形。这两个结果也是目前为止我们得到的关于丰沛猜想的最一般的结果。

3 KSBA 稳定簇的射影性

如前所述,紧 KSBA 模空间的射影性是建立一般 KSBA 理论的重要一步。Kollar 在 20 世纪 90 年代初期便提出一个证明其射影性的一半方法,并最终由 Fujino 完成。在 KSBA 模空间上有一个自然的线丛,被称为 CM 线丛,首先由田刚构造^[8]。我们使用纯代数几何的方法证明了 CM-线丛^[9],也是 KSBA 模空间上的充沛丛。微分几何里人们普遍相信,CM-丛应该是有特殊度量的簇构成的模空间上的充沛丛。但是要严格证明此论点,仍需要很多努力。我们的结果解决了 KSBA 稳定簇的特殊情形,为这个观点提供了重要证据。

4 Fano 簇的紧模空间

我们前面提到人们研究参数化典范极化簇的模空间,因为它们带有自然的极化。另一类带有自然极化的簇是 Fano 簇——负典范线丛构成其上的自然极化。但是与典范簇所相比,Fano 簇的参数化问题有着很不同的性质。特别的,已知的例子告诉我们,需要附加上其他的稳定性条件,才能保证模空间是 Hausdorff 紧的。

经过一系列工作,最后在田刚^[8]和 Donaldson 关于微分几何学里的工作的基础上,人们认识到正确的稳定性条件是 K-稳定性。

我们把极小模型纲领系统的引入对 Fano 簇退化的研究当中^[10],将利用极小模型纲领构造出的特殊退化和计算在此过程当中 CM-权的变化相结合,比较了由极小模型纲领给出的不同双有理模型里相

应退化由 CM-权的大小所刻画的 K-稳定性上的差异性,导出了 Fano 簇的特殊退化理论。作为推论,利用这个研究工作,我们解决了田刚关于他的 K-稳定性定义和 Donaldson 的 K-稳定性定义的等价性的猜测。

但是完全从代数几何的角度研究 K-稳定性目前仍然有困难。而在微分几何中,田刚^[11]和陈-Donaldson-孙^[12-14]分别独立证明了丘-田-Donaldson 猜想。这是复几何中的一个巨大进展。我们使用前面所述工作里得到的结果,把微分几何和代数几何联系在一起研究 Fano 簇的退化,证明了所有可以光滑化的 K-polystable Fano 簇被紧 Hausdorff 代数空间参数化^[15]。我们^[16]更进一步,给出强烈的证据表明这个代数空间其实是射影的;事实上,和上一节关于 KSBA 模空间上 CM-线丛的正性所做研究类似,我们证明了 CM-线丛限制在紧模空间中参数化 K-polystable Fano 流形的稠密开集上是充沛的。下一步的自然问题就是如何证明 CM-线丛在整个紧模空间上是充沛的。

致谢 本研究对象得到国家杰出青年科学基金(11425101)资助。

参 考 文 献

- [1] Xiaowei Wang, Chenyang Xu. Nonexistence of asymptotic GIT compactification. *Duke Math J.*, 2014, 163 (12),: 2217—2241.
- [2] Janos Kollar. Log surfaces of general type: some conjectures in Classification of Algebraic Varieties (L'Aquila, 1992). *Contemp Math.* Providence: Amer Math Soc, 1994: 261—275.
- [3] Christopher Hacon, James McKernan, Chenyang Xu. On the birational automorphisms of varieties of general type. *Annals of Math.*, 2013, 177 (3): 1077—1111.
- [4] Christopher Hacon, James McKernan, Chenyang Xu. ACC for log canonical thresholds, 2014, 180(2): 523—571.
- [5] Christopher Hacon, James McKernan, Chenyang Xu. Boundedness of moduli of varieties of general type. *Eprint Arxiv*, 2014.
- [6] Caucher Birkar, Paolo Cascini, Christopher Hacon, James McKernan. Existence of minimal models for varieties of log general type. *J Am Math Soc.*, 2010 23 (2): 405—468.
- [7] Christopher Hacon, Chenyang Xu. Existence of log canonical closures. *Invent Math.*, 2013, 192 (1): 161—195.
- [8] Gang Tian. Kähler-Einstein metrics with positive scalar curvature. *Invent Math.*, 1997, 130 (1): 1—37.
- [9] Zsolt Patakfalvi, Chenyang Xu. Ampleness of the CM line bundle on the moduli space of canonically polarized varieties. *Eprint Arxiv*, 2015.
- [10] Chi Li, Chenyang Xu. Special test configurations and K-stability of Fano varieties (with Chi Li). *Annals of Math.*, 2014, 180 (1): 197—232.

- [11] Gang Tian. K-stability and Kähler-Einstein metrics. *Comm Pure Appl Math*, 2015, 68 (7): 1085—1156.
- [12] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, Song Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. III: Limits as cone angle approaches 2π and completion of the main proof. *J Amer Math Soc*, 2015, 28 (1): 235—278.
- [13] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, Song Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. II: Limits with cone angle less than 2π . *J Amer Math Soc*, 2015, 28 (1): 199—234.
- [14] Xiuxiong Chen, Simon Donaldson, Song Sun. Kähler-Einstein metrics on Fano manifolds. I: Approximation of metrics with cone singularities. *J Amer Math Soc*, 2015, 28 (1): 183—197.
- [15] Chi Li, Xiaowei Wang, Chenyang Xu. Degeneration of Kähler-Einstein Fano manifolds. Imperial College London, 2012.
- [16] Chi Li, Xiaowei Wang, Chenyang Xu. Quasi-projectivity of the moduli space of smooth Kähler-Einstein Fano manifolds. *Eprint Arxiv*, 2015.

Fundamental problems in compact moduli spaces

Xu Chenyang

(Beijing International Center for Mathematical Research, Peking University, Beijing100871)

Abstract

Key words moduli space; KSBA-stability; K-stability; Fano varieties

· 资料信息 ·

我国科学家在水稻恢复基因研究方面取得新成果

近日,武汉大学杂交水稻国家重点实验室朱英院士团队在水稻恢复基因的克隆与分子机理上取得新成果,该成果以“Pentatricopeptide-repeat family protein RF6 functions with hexokinase 6 to rescue rice cytoplasmic male sterility (PPR 蛋白 RF6 与 OsH XK6 互作恢复水稻细胞质雄性不育链接 <http://www.pnas.org/content/early/2015/11/16/1511748112.long>)”为题发表在国际著名期刊《美国科学院院报》(PNAS)上,第一作者为团队研究骨干黄文超博士。该研究由国家自然科学基金(资助号:31371236)等项目资助完成。

红莲型细胞质雄性不育系是当前三种主要类型水稻细胞质雄性不育系之一,为杂交育种作出了巨大贡献。红莲型杂交水稻育性受 *orfH79* 不育基因控制,为两对独立恢复基因 *RF5* 和 *RF6* 恢复正常。*RF6* 被定位于第 8 号染色体,能同时恢复红莲型和包台型。*RF6* 属于 PPR 基因 P 亚家族里一个十分

特殊的新基因,由 20 个 PPR 单元串联而成,其中 PPR 单元 3—5 被复制了一次,进而具备恢复功能;而其等位基因 *rf6* 共有 17 个 PPR 结构单元,对应的 PPR 单元 3—5 未被复制,不具备恢复功能,暗示着 PPR 单元对基因的生物学功能具有重要的意义。*RF6* 蛋白定位在线粒体,在那里它与己糖激酶 6 (hexokinase 6, OsH XK6) 物理结合,加工不育基因转录本 *atp6-orfH79*,确保了正常花粉发育及恢复育性,而下调 *OsH XK6* 表达水平可导致 *atp6-orfH79* 转录物累积和雄性不育。PPR 是植物体内一个庞大的基因家族,*RF6* 的鉴定为研究 PPR 基因家族开辟了新方向;对 *OsH XK6* 的研究为调控线粒体 RNA 的代谢添加了新知识,这些结果对于进一步利用作物杂种优势具有重要的理论与实践意义。

(供稿:严明理 杜生明)